МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Понятие множества

В дальнейшем мы будем различать следующие лексикологические понятия: *словоупотребление, форма слова (словоформа), слово*, а также *исходная форма слова*. Под *словоупотреблением* понимается цепочка букв, заключенная между двумя пробелами в тексте и имеющая одно значение (омонимические словоупотребления рассматриваются как различные). Полностью совпадающие словоупотребления представляют одну *словоформу*. Слово выступает как некоторый класс (сумма) семантически и грамматически связанных между собой словоформ. Словоупотребление является единицей текста, слово – единицей двуязычного, толкового, энциклопедического и т. д. словаря. В этих словарях слово представлено в так называемой *исходной форме*, в качества которой в русском языке выступает обычно именительный падеж единственного числа – для именных форм и инфинитив – для глагольных форм. Что же касается словоформы, то она используется обычно в качестве единицы частотного словаря.

Одно из основных понятий современной математики – понятие ***множества***. Оно является первичным, т. е. не поддается определению через другие, более простые понятия. С понятием множества мы встречаемся довольно часто: буквы русского алфавита образуют множество, то же можно сказать о словоупотреблениях, содержащихся в данном предложении, на данной странице и т. д.

Приведенные примеры обладают одним существенным свойством: все эти множества состоят из определенного конечного числа объектов, которые мы будем называть ***элементами множества***. При этом каждый из объектов данного вида либо принадлежит, либо не принадлежит рассматриваемому множеству. Так, например, буква ***ф*** вне всякого-сомнения принадлежит множеству букв, образующих русский алфавит, в то время как буква ***f*** этому множеству не принадлежит.

Множества, включающие только такие объекты, принадлежность или непринадлежность которых к тому или иному множеству не вызывает сомнения, называются ***четкими множествами***. Поскольку каждый рассматриваемый объект либо принадлежит, либо не принадлежит к рассматриваемому четкому множеству, эти множества всегда имеют ясно очерченные границы. Четким множествам противопоставлены ***нечеткие*** или «лингвистические» ***множества***, включающие такие объекты, которые могут быть отнесены к тому или иному множеству лишь с определенной степенью достоверности.

Понятие нечеткого множества можно проиллюстрировать на примере семантических полей прилагательных *младенческий, детский, отроческий, юношеский, молодой, среднего возраста, старый*. Чтобы определить границы семантических полей указанных слов и словосочетаний, произведем следующий эксперимент. Предложим большой группе испытуемых – носителей русского языка относить к той или иной возрастной группе мужчин различного возраста. При этом выясняется, что интервал от 10 до 14 лет одними испытуемыми будет квалифицироваться как детский, а другими – как отроческий возраст. Аналогичным образом период от 17 до 23 лет может считаться либо как юношеский, либо как относящийся к молодому возрасту. Таким образом, каждое из рассмотренных семантических полей представляет собой нечеткое подмножество с размытыми краями. Объекты, попадающие на эти размытые края, относятся к указанным множествам лишь с известной долей достоверности. Так, например, двадцатилетний мужчина может быть с достоверностью 50% отнесен к множеству юношей, и с той же достоверностью – к множеству молодых людей.

Аппарат нечетких множеств может применяться для описания процессов мышления, лингвистических явлений и вообще для моделирования человеческого поведения, при котором допускаются частичные истины, а строгий математический формализм не является категорически необходимым.

Множества, которые состоят из конечного числа элементов, называются ***конечными множествами***. К числу конечных множеств относится также и *пустое множество,* т.е. множество, не содержащее ни одного элемента. Введение понятия пустого множества связано с тем, что, определяя тем или иным способом множество, мы не можем знать заранее, содержит ли оно хотя бы один элемент. Например, множество двухбуквенных комбинаций *чы, бй, оъ,* можно считать пустым, если иметь в виду только русские тексты, написанные на литературном языке и не содержащие опечаток.

Лингвистика чаще всего имеет дело с конечными множествами объектов. Однако приходится рассматривать и ***бесконечные множества***. Например, бесконечным является множество всех словоупотреблений в текстах данного языка при условии, что этот язык беспрерывно порождает и будет порождать новые тексты без какого-либо ограничения во времени.

Способы задания множества

Произвольные множества будем обозначать прописными, а элементы множества – строчными буквами латинского алфавита, пустое множество – символом **Ø**.

Существуют два различных способа задания множества. Можно дать полный перечень элементов этого множества. Этот способ называется ***перечислением множества***. Элементы перечисляемого множества заключают обычно в фигурные скобки. Например, множество $\boldsymbol{A}$, состоящее из букв русского алфавита, вместе с пробелом (его обозначают знаком Δ) запишется так: $\boldsymbol{A} = \{$***а, б, в, ..., ю, я,*** $\Delta\}$.

Другой способ состоит в том, что задается свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий рассматриваемому множеству, и не обладает ни один элемент, ему не принадлежащий. Этот способ называют ***описанием множества***, а свойство, определяющее множество, – ***характеристическим***.

При описании множеств используются различные символы, операции. Если $\boldsymbol{A}$ есть некоторое множество, а $\boldsymbol{x}$ – входящий в него объект, то символическая запись $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ означает, что $\boldsymbol{x}$ является элементом множества $\boldsymbol{A}$; при этом говорят: «$\boldsymbol{x}$ входит в $\boldsymbol{A}$», «$\boldsymbol{x}$ принадлежит $\boldsymbol{A}$». Если $\boldsymbol{x}$ не принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$, то пишут $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}$. Пусть, например, $\boldsymbol{A}$ есть множество букв русского алфавита, тогда, обозначив букву ***д*** как элемент $\boldsymbol{x}$, а букву $\boldsymbol{d}$ как элемент $\boldsymbol{y}$, можно записать $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{A}$. В том случае, когда речь идет о нечетком множестве, указывается степень достоверности, с которой $\boldsymbol{x}$ принадлежит множеству $\boldsymbol{A}$, Это выражается записью $\boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})$. Например, пусть $\boldsymbol{A}$ – множество юношей, а $\boldsymbol{x}$ обозначает двадцатилетнего мужчину; тогда, исходя из приведенных выше рассуждений, можно записать $\boldsymbol{0{,}5}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A})$.

Отношения между множествами

Чтобы наглядно изображать множества и отношения между ними, английский математик Джон Венн (1834 - 1923) предложил использовать замкнутые фигуры на плоскости. Намного раньше Леонард Эйлер (1707 - 1783) для этих целей использовал круги, при этом точки внутри круга считались элементами множества. Такие изображения сейчас называют диаграммами Эйлера - Венна.

Пусть даны два произвольных множества A и B, тогда возможны пять случаев отношений между ними:

1. Множества A и B не имеют общих элементов (см. рис. 1а).
2. Множества A и B имеют общие элементы, но не все элементы множества A принадлежат множеству B , и не все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят о ***пересечении*** множеств A и B (см. рис. 1б).
3. Все элементы множества B принадлежат множеству A, но не все элементы множества A принадлежат множеству B. В этом случае говорят о ***включении*** множества B во множество A (см. рис. 1в).

Определение: Если имеются два множества A и B, причем каждый элемент множества B принадлежит множеству A, то множество B называется ***подмножеством*** множества A. Записывается это так: $B \subset A$.

Само множество A и пустое множество $\varnothing$ называют ***несобственными*** подмножествами множества A. Все остальные подмножества называются ***собственными***.

4. Все элементы множества A принадлежат множеству B, но не все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят о ***включении*** множества A во множество B ($A \subset B$) (см. рис. 1г).
5. Все элементы множества A принадлежат множеству B и все элементы множества B принадлежат множеству A. В этом случае говорят, что множества A и B равны (см. рис. 1д).

Определение: а) Два множества A и B называются ***равными*** (или совпадающими), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

б) Два множества A и B называются ***равными***, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывается это так: $A = B$.

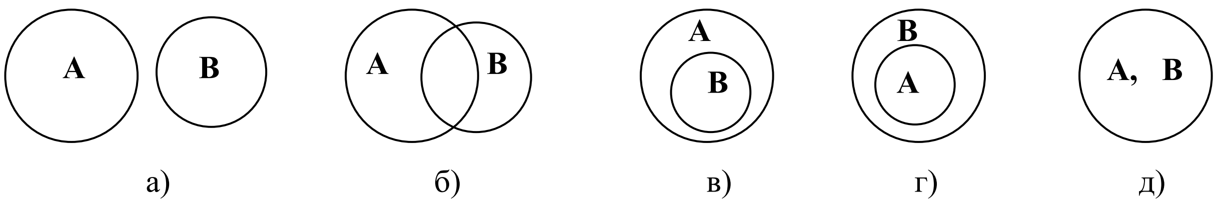

Рис. 1

Определение: Множество, относительно которого все множества, рассматриваемые в данной задаче, являются подмножествами, называется ***универсальным***. Универсальное множество будем обозначать буквой U.

Основные операции над множествами

Основными операциями, осуществляемыми над множествами, являются *сложение (объединение), умножение (пересечение)* и *вычитание.* Эти операции, как мы увидим дальше, не тождественны одноименным операциям, производимым над числами.

Определение: ***Объединением*** (или *суммой)* двух множеств A и B называется множество, содержащее все такие и только такие элементы, которые являются элементами хотя бы одного из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначают как $A \cup B$.

Это определение означает, что сложение множеств A и B есть объединение всех их элементов в одно множество $A \cup B$. Если одни и те же элементы содержатся в обоих множествах, то в объединение эти элементы входят только по одному разу.

Аналогично определяется объединение трёх и более множеств.

Определение: ***Пересечением*** (или *умножением)* двух множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и множеству B одновременно. Пересечение множеств A и B обозначают как $A \cap B$.

Аналогично определяется пересечение трёх и более множеств.

Определение: ***Разностью*** множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов множества A и которые не принадлежат множеству B. Разность множеств A и B обозначают как $A \setminus B$. Операция, при помощи которой находится разность множеств, называется *вычитанием.*

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется ***дополнением*** множества B до множества A. Если множество B является подмножеством универсального множества U, то дополнение B до U обозначается $\overline{\mathrm{B}}$, то есть $\overline{\mathrm{B}} = U \setminus B$.

Свойства объединения и пересечения множеств

Из определений объединения и пересечения множеств вытекают свойства этих операций, представленные в виде равенств, справедливых для любых множеств A, B и C .

1. $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность объединения;
2. $A \cap B = B \cap A$ – коммутативность пересечения;
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – ассоциативность объединения;
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ – ассоциативность пересечения;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;

законы поглощения:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cup \varnothing = A$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cup U = U$
6. $A \cap U = A$

Следует заметить, что разность не обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, то есть $A \setminus B \neq B \setminus A$ и $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$. В этом легко убедиться, построив диаграммы Эйлера - Венна.

Разбиение множества на классы. Классификация

В процессе изучения предметов и явлений окружающего мира мы постоянно сталкиваемся с классификацией. Классификация широко используется в биологии, химии, математике, языке и многих других науках. Она облегчает процесс усвоения знаний.

Классификация в любой области человеческой деятельности связана с разбиением множества на подмножества (классы). Например, классификация частей речи, членов предложения, чисел, геометрических фигур и так далее.

Полученные подмножества должны обладать некоторыми свойствами:

1) они не должны быть пустыми;
2) не должны содержать общих элементов;
3) объединение всех подмножеств должно равняться самому множеству.

Определение: ***Классификацией*** или разбиением множества на классы называется представление этого множества в виде объединения непустых попарно непересекающихся своих подмножеств.

Для примера рассмотрим классификацию с помощью двух свойств.

Пусть U – множество студентов лингвистического института РГПУ, свойство $\boldsymbol{\alpha}$ - «быть отличником», свойство $\boldsymbol{\beta}$ - «быть спортсменом». С помощью указанных свойств можно выделить следующие подмножества:

$\mathbf{A}$ – множество отличников;
$\overline{\mathbf{A}}$ – множество не отличников;
$\mathbf{B}$ – множество спортсменов;
$\overline{\mathbf{B}}$ – множество не спортсменов.

Множество U в этом случае оказывается разбитым на следующие четыре класса (подмножества):

I – множество отличников-спортсменов;

II – множество отличников - не спортсменов;

III – множество не отличников - спортсменов;

IV – множество не отличников - не спортсменов;

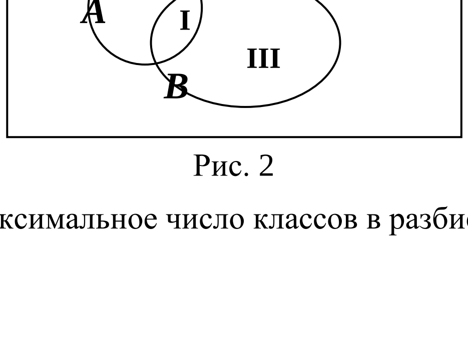

Рис. 2

Можно доказать, что если $\mathbf{n}$ – число свойств, то максимальное число классов в разбиении равно $\mathbf{2^n}$.

Число элементов объединения и разности двух конечных множеств

Пусть A и B – конечные множества. Число элементов множества A условимся обозначать символом $m(A)$ и называть ***численностью*** множества A.

Определим численность объединения множеств A и B.

Если множества A и B не пересекаются (см. рис. 1а), то $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Таким образом, численность объединения конечных непересекающихся множеств равна сумме численностей этих множеств.

Если множества A и B пересекаются (см. рис. 1б), то в сумме $m(A) + m(B)$ число элементов пересечения $A \cap B$ содержится дважды: один раз в $m(A)$,а другой – в $m(B)$. Поэтому, чтобы найти численность объединения $m(A \cup B)$, нужно из указанной суммы вычесть $m(A \cap B)$. Таким образом:

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$$

Определим теперь численность разности множеств A и B.

Если множества A и B не пересекаются (см. рис. 1а), то $A \setminus B = A$, и поэтому $m(A \setminus B) = m(A)$.

Если множества A и B пересекаются (см. рис. 1б), то $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$.

Если $B \subset A$ (см. рис. 1в), то $A \cap B = B$, и, следовательно, $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$.

ЗАДАЧИ ТЕМЫ «МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ»

1. В группе из ***70*** студентов ***55*** человек знают английский язык, ***18*** знают французский язык и ***13*** человек знают оба языка. Сколько студентов в группе не знают ни английского, ни французского языка?
2. Исследуется текст из ***40*** предложений, в котором ***30*** предложений содержат местоимение «**я**», ***27*** предложений содержат местоимение «**он**» и только ***пять*** предложений не содержат ни того, ни другого. Сколько предложений содержат оба местоимения?
3. ***20*** студентов сдавали экзамены. При этом ***пятеро*** сдавали экзамен по английскому языку, ***восемь*** – по немецкому, а ***10*** – только экзамен по истории. Сколько студентов сдавали экзамен по английскому языку, но не сдавали по немецкому? Сколько студентов сдавали два экзамена? *(Сформулируйте эту задачу как лингвистическую, например: анализ наличия 2 предлогов в предложениях; и в общем виде, используя понятия: множество, подмножества и их элементы)*
4. Для подготовки к зачету каждому студенту на курсе необходимо перевести хотя бы одну публицистическую статью. Было выбрано 57 газетных статей и 36 журнальных. Сколько студентов на курсе, если 12 человек выбрали и газетную, и журнальную статьи?
5. В олимпиаде по иностранному языку принимало участие 40 студентов, им было предложено ответить на один вопрос по лексикологии, один по страноведению и один по стилистике. Результаты проверки ответов представлены в таблице:

Получены правильные ответы на вопросы	*Количество ответов*
по лексикологии	20
по страноведению	18
по стилистике	18
по лексикологии и страноведению	7
по лексикологии и стилистике	8
по страноведению и стилистике	9

Известно также, что трое не дали правильных ответов ни на один вопрос. Сколько студентов правильно ответили на все три вопроса? Сколько студентов правильно ответили ровно на два вопроса?

6. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по сочинению–48 абитуриентов, по истории–37, по английскому языку–42, по сочинению или истории–75, по сочинению или английскому языку–76, по истории или английскому языку–66, по всем трем предметам–4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?
7. 180 студентов одного курса сдавали экзамены по английскому языку и истории. 15 из них не сдали экзамен по истории, 10 не сдали экзамен по английскому языку и 5 не сдали обоих экзаменов. Сколько студентов не сдали экзамен по истории и сдали экзамен по английскому языку. Сколько студентов сдали экзамен по истории н не сдали экзамен по английскому языку?
8. Каждый из студентов 3 курса в летние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли А, В и С видели соответственно 25, 12 и 23 студента. Сколько студентов на 3 курсе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?
9. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы А, *В* и *С.* Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В – 16, фильм С – 19. Найти, сколько студентов просмотрели все три фильма.
10. Преподаватель решил узнать, кто из 40 студентов читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читало 25 человек, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книгу А или В читали 33 студента, А или С – 32, В или С – 31; все три книги прочли 10 студентов. Сколько студентов прочли только по одной книге? Сколько студентов не читали ни одной из этих трех книг?
11. В спортивном лагере 65% студентов умеют играть в футбол, 70%–в волейбол и 75%–в баскетбол. Каково наименьшее число студентов, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

<u>Образец контрольной работы</u> *(время выполнения – max 30 минут)*

<u>Задача 1.</u> Пусть **R** – множество букв современного русского алфавита,

A – подмножество **R**, состоящее из букв, составляющих слово ***<u>аксиома</u>***,

B – подмножество **R**, состоящее из букв, составляющих слово ***<u>скорость</u>***,

C – подмножество **R**, состоящее из букв, составляющих слово ***<u>паспорт</u>***.

Задать способом перечисления следующие множества и найти количество их элементов:

а) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ б) $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ в) $\mathbf{C} \setminus \mathbf{A}$ г) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}$

<u>Задача 2</u>. Исследуется текст из 100 предложений. В каждом из 100 предложений имеется либо местоимение «***я***», либо местоимение «***ты***», либо оба местоимения. Всего в тексте встретилось 60 местоимений «***я***» и 50 местоимений «***ты***». Сколько предложений содержат и местоимение «***я***» и местоимение «***ты***»? Сколько предложений содержат местоимение «***я***» и не содержат местоимения «***ты***»?

<u>Задача 3</u>. Из 35 сотрудников фирмы «Толмач», каждый из которых владеет хотя бы одним иностранным языком, 25 человек знают английский язык, 15 человек – греческий язык, 20 человек – французский язык, 15 человек знают английский и французский языки, 6 – греческий и французский языки и 10 – греческий и английский языки. Сколько сотрудников фирмы знают: а) все 3 языка?

б) только греческий и французский языки (т.е. знают греческий и французский языки, но не знают английского языка)?